

Pereira, Peter; Keitel, Christine

Nachdenken über den Inhalt von Mathematikunterricht

Hopmann, Stefan [Hrsg.]; Riquarts, Kurt [Hrsg.]: Didaktik und/oder Curriculum. Grundprobleme einer international vergleichenden Didaktik. Weinheim u.a. : Beltz 1995, S. 175-195. - (Zeitschrift für Pädagogik, Beiheft; 33)



Quellenangabe/ Reference:

Pereira, Peter; Keitel, Christine: Nachdenken über den Inhalt von Mathematikunterricht - In: Hopmann, Stefan [Hrsg.]; Riquarts, Kurt [Hrsg.]: Didaktik und/oder Curriculum. Grundprobleme einer international vergleichenden Didaktik. Weinheim u.a. : Beltz 1995, S. 175-195 - URN: urn:nbn:de:01111-pedocs-100071 - DOI: 10.25656/01:10007

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:01111-pedocs-100071>

<https://doi.org/10.25656/01:10007>

in Kooperation mit / in cooperation with:

BELTZ JUVENTA

<http://www.juventa.de>

Nutzungsbedingungen

Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document.

This document is solely intended for your personal, non-commercial use. Use of this document does not include any transfer of property rights and it is conditional to the following limitations: All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

Kontakt / Contact:

peDOCS

DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
Informationszentrum (IZ) Bildung

E-Mail: pedocs@dipf.de

Internet: www.pedocs.de

Digitalisiert

Mitglied der


Leibniz-Gemeinschaft

Zeitschrift für Pädagogik

33. Beiheft

Zeitschrift für Pädagogik

33. Beiheft

Didaktik und/oder Curriculum

Grundprobleme einer international vergleichenden
Didaktik

Herausgegeben von
Stefan Hopmann und Kurt Riquarts
in Zusammenarbeit mit
Wolfgang Klafki und Andreas Krapp

Beltz Verlag · Weinheim und Basel

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

[Zeitschrift für Pädagogik / Beiheft]

Zeitschrift für Pädagogik. Beiheft. – Weinheim ; Basel : Beltz.

Früher Schriftenreihe

Reihe Beiheft zu: Zeitschrift für Pädagogik

ISSN 0514-2717

33. Didaktik und, oder Curriculum. – 1995

Didaktik und, oder Curriculum : Grundprobleme einer internationalen vergleichenden Didaktik / hrsg. von Stefan Hopmann und Kurt Riquarts. In Zusammenarbeit mit Wolfgang Klafki und Andreas Krapp. – Weinheim ; Basel : Beltz, 1995

(Zeitschrift für Pädagogik : Beiheft ; 33)

ISBN 3-407-41134-0

NE: Hopmann, Stefan [Hrsg.]

Die in der Zeitschrift veröffentlichten Beiträge sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache übertragen werden. Auch die Rechte der Wiedergabe durch Vortrag, Funk- und Fernsehsendung, im Magnettonverfahren oder ähnlichem Wege bleiben vorbehalten. Fotokopien für den persönlichen oder sonstigen eigenen Gebrauch dürfen nur von einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus als Einzelkopie hergestellt werden. Jede im Bereich eines gewerblichen Unternehmens hergestellte oder benutzte Kopie dient gewerblichen Zwecken gem. § 54 (2) UrhG und verpflichtet zur Gebührenzahlung an die VG Wort, Abteilung Wissenschaft, Goethestr. 49, 80336 München, von der die einzelnen Zahlungsmodalitäten zu erfragen sind.

© 1995 Beltz Verlag · Weinheim und Basel

Herstellung: Klaus Kaltenberg

Satz (DTP): Satz- und Reprotechnik GmbH, Hemsbach

Druck: Druckhaus Beltz, Hemsbach

Printed in Germany

ISSN 0514-2717

Bestell-Nr. 41134

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

STEFAN HOPMANN/KURT RIQUARTS	
Didaktik und/oder Curriculum. Grundprobleme einer international vergleichenden Didaktik.	9

II. Grundlagen

BJØRG B. GUNDEM	
Historische Wurzeln und heutige Grundlagen	37
KLAUS SCHALLER	
Die Didaktik des Johann Amos Comenius zwischen Unterrichtstechnologie und Bildungstheorie	47
MAX VAN MANEN	
Herbart und der Takt im Unterricht	61
DAVID HAMILTON	
Ordnung und Struktur in Didaktik und Curriculum.	81
WOLFGANG KLAFKI	
Zum Problem der Inhalte des Lehrens und Lernens in der Schule aus der Sicht kritisch-konstruktiver Didaktik	91

III. Paradigmata und Forschungsansätze

REINER BROMME	
Was ist „pedagogical content knowledge“? Kritische Anmerkungen zu einem fruchtbaren Forschungsprogramm	105
PETER MENCK	
Anmerkungen zum Begriff der „Didaktik“ in Deutschland	115
CHARLES W. ANDERSON	
Unterrichtsinhalte in einer multikulturellen Gesellschaft	127

WALTER DOYLE	
Untersuchungen zum umgesetzten Curriculum	143
SIGRUN GUDMUNSDOTTIR/ANNE REINHARTSEN/NILS P. NORDTØMME	
„Etwas Kluges, Entscheidendes und Unsichtbares“: Über das Wesen des pädagogischen Wissens über die Unterrichtsinhalte.....	163
PETER PEREIRA/CHRISTINE KEITEL	
Nachdenken über den Inhalt von Mathematikunterricht	175
EWALD TERHART	
Unterrichtsforschung: Einflüsse, Entwicklungen, Probleme.....	197
 <i>IV. Didaktik und Curriculum in Forschung, Entwicklung und Lehrerbildung – Länderberichte</i>	
IAN WESTBURY	
Didaktik und Curriculumtheorie: Zwei Seiten einer Medaille?	211
INGRID CARLGREN/TOMAS ENGLUND (Schweden)	
Die erneute Diskussion der Unterrichtsinhalte in der schwedischen Bildungsforschung und im landesweiten Curriculum.....	237
BERIT KARSETH (Norwegen)	
Didaktik in Forschung, Lehrerbildung und Lehrplanentwicklung in Norwegen	249
ARTHUR JENNINGS (England/Wales)	
Didaktik, Curriculum und der Lehrplan – eine englische Sicht	261
GEORGE J. POSNER (USA)	
Curriculumtheorie, naturwissenschaftlicher Unterricht und die Naturwissenschaften	273
SVEN ERIK NORDENBO/KIRSTEN REISBY/KARSTEN SCHNACK (Dänemark)	
Didaktik in Dänemark	285
PERTTI KANSANEN/MICHAEL ULJENS (Finnland)	
Eine systematische Übersicht über die finnische Didaktik	299
HORST BAYRHUBER (Deutschland)	
Dimensionen der Didaktik der Naturwissenschaften in Deutschland	309
 <i>Über die Autorinnen und Autoren dieses Bandes.....</i>	 319

Nachdenken über den Inhalt von Mathematikunterricht

1. Einleitung

Der folgende Beitrag stellt die curriculumtheoretische Tradition und ihre Auswirkungen auf die Lehrerbildung in den USA dar, die von Methodenfragen und einer psychologischen Perspektive auf den Unterrichtsprozeß bestimmt ist und den Unterrichtsinhalt vernachlässigt. Am Beispiel des Mathematikunterrichts und dessen Planung wird das Fehlen der Auseinandersetzungen um den Inhalt, diskutiert an Grundfragen von J. SCHWAB und seiner Analyse von Wissensstrukturen und deren Bedeutung für Unterricht, kritisiert und korrigiert. Erst eine Mathematikdidaktik, die in den didaktischen Sachanalysen den Kern der Planungstätigkeit von Lehrern sieht, kann hinreichend offene Sichtweisen vom Unterrichtsinhalt und eine ihnen entsprechende Vielfalt von didaktischen Entscheidungsmöglichkeiten entwickeln.

In der Bundesrepublik ist diese inneramerikanische Auseinandersetzung eher unbekannt, gerade hier wurden in der erziehungswissenschaftlichen Wende der siebziger Jahre mit der Übernahme curriculumtheoretischer Ansätze die Allgemeindidaktik und die traditionell auf Stoffdidaktik beschränkte Fachdidaktik herausgefordert und durch die Adaption von Lernzielvorgaben, technisch-systematische Methoden- und Mediendiskussionen und die psychologisch orientierte Unterrichtsforschung stark beeinflußt und ergänzt.

2. Unterrichtsvorbereitung in den USA

In den Vereinigten Staaten (wie ohne Zweifel überall in der Welt) müssen Lehrer häufig schriftliche Unterrichtspläne entwerfen, die im Detail darstellen, was sie im Unterricht beabsichtigen. Im allgemeinen werden sie schon sehr frühzeitig darin ausgebildet, oftmals noch bevor sie überhaupt einem realen Schüler begegnet sind, und sie sind mit solchen Planungstätigkeiten während ihrer gesamten Ausbildung beschäftigt. Gegen Ende ihrer Ausbildungszeit – wenn sie schon Schüler unterrichten und somit vielleicht zum ersten Mal die Nutznießer solcher immer perfekter ausgearbeiteten Pläne treffen – wird von ihnen verlangt, vor jeder Unterrichtsstunde schriftliche Pläne zu verfassen und diese mit ihren Ausbildern zu diskutieren. Von jungen Lehrern wird erwartet, daß sie auch in der Praxis fortfahren, schriftliche Unterrichts-

planungen vorzubereiten, für jede Klasse und jeden Tag, und in vielen Schulen wird von allen Lehrern gefordert, dem Schulleiter oder dem Fachbereichsleiter wöchentliche Unterrichtspläne – oft in einem vorgeschriebenen Format – vorzulegen.

Wenn man sich die Tatsache vor Augen führt, daß schriftliche Unterrichtspläne überall verbreitet und sehr hoch bewertet werden, ist es überraschend, daß es kein allgemeines Einverständnis darüber gibt, wie ein Unterrichtsplan überhaupt aussehen soll. Die meisten Autoren empfehlen eine Vielfalt alternativer Formate, weisen möglicherweise auf ein bevorzugtes Format hin und schlagen dann vor, daß jeder Lehrer sein persönliches System von Schema und Plan entwickeln möge, mit dem er am besten arbeiten kann. Andere Autoren optieren für ein einziges Format, das sie mit Common-sense-Argumenten und mit Hinweisen auf Ergebnisse empirischer Untersuchungen rechtfertigen. Gelegentlich hat eines dieser Formate weitverbreitete Akzeptanz gefunden und, zum Teil als Konsequenz daraus, weitverbreitete Kritik. In den darauffolgenden Kontroversen jedoch hat kein einziges Format sich als Stilvorgabe für Schemata der Unterrichtsvorbereitung durchsetzen können.

Dennoch enthalten die meisten Beschreibungen eines als geeignet angesehenen Unterrichtsplans dieselben Basiselemente – Ziele, Inhalte, Methoden und Evaluation –, jedoch mit unterschiedlichen Schwerpunkten und in unterschiedlicher Reihenfolge. Lehrer, die sich an ein Format gewöhnt haben, können sich bei Schul- oder Distriktwechsel leicht anpassen, wenn dort ein anderes Format gefordert wird. Wenn man eine Übersicht zu allgemein vielbenutzten Lehrtexten und Richtlinien von Schuldistrikten herstellt (z.B. CLARK/STARR 1991; JOHNSON/JOHNSON 1991; KIM/KELLOUGH 1991; CALLAHAN et al. 1992), gilt das in Abbildung 1 dargestellte allgemeine Schema einer Unterrichtsplanung als generell akzeptiert. Einige Schemata erfordern mehr Details, andere erfordern weniger, und wiederum andere schreiben bestimmte Lehrmethoden vor. Dennoch würde ein Lehrer, der diese allgemeine Skizze benutzt, einen Unterrichtsplan entwickeln können, den die meisten Ausbilder als vom Format her akzeptabel anerkennen, obgleich es sehr wohl Differenzen über die Substanz des Planes geben könnte.

Diese Skizze soll dem Leser einen Eindruck davon vermitteln, was generell von Unterrichtsplänen erwartet wird. Dabei sollte bedacht werden, daß es hier nur um die Charakterisierung dessen geht, was die Lehrer aufschreiben sollen; das heißt, was in den Plänen enthalten sein soll; das Schema gibt Auskunft darüber, was ihnen in ihrer Ausbildung als Lesestoff an vorgeschriebener erziehungswissenschaftlicher Literatur empfohlen wird und was deshalb Schuladministratoren fordern oder akzeptieren werden. Es sagt nichts darüber aus, was Lehrer tatsächlich tun – wie sie planen, wie sie denken oder wie sie ihre Entscheidungen treffen. Die Forschungen zu diesen Fragestellungen (z.B. PETERSON et al. 1978; CLARK/PETERSON 1986; CALDERHEAD 1987, 1988; LOWYCK/CLARK 1989; oder DAY et al. 1993) haben einen auffällig geringen Einfluß auf das, was Lehrerausbildungsprogramme und Schulen von Lehrern bei der Erstellung von Unterrichtsplänen erwarten.

Auch ein kursorischer Blick auf Musterbeispiele von Unterrichtsplänen zeigt den starken Einfluß von eher technischen und einlinigen Beschreibungen des Planungsprozesses, eine Perspektive, die die Literatur zur Unterrichtsplanung für viele Jahre dominiert hat (vgl. TABA 1956; POPHAM/BAKER 1970 oder GAGNÉ et al. 1988).

Abbildung 1
Allgemeines Schema einer Unterrichtsplanung

- SPEZIFISCHES ZIEL** Was hoffen Sie mit dieser Unterrichtsstunde zu erreichen?
Grenzen Sie diese Unterrichtsstunde von anderen ab. Seien Sie dabei so klar und deutlich wie möglich.
- GENERELLES ZIEL** Warum ist dieses spezielle Ziel wert, erreicht zu werden?
Erklären Sie dies durch das Ziel selbst oder durch seine Stellung in einer größeren Unterrichtseinheit.
- INHALT** Was erwarten Sie, daß Ihre Schülerinnen und Schüler lernen?
Schreiben Sie eine kurze Zusammenfassung über den Inhalt, der in dieser Stunde behandelt werden soll.
- STUNDENVERLAUF** Was planen Sie zu tun?

Stundeneinstieg/Motivationsphase – Wie schaffen Sie ein adäquates Lernklima?

Beschreiben Sie, wie Sie die Stunde eröffnen, um die Schülerinnen und Schüler für das Thema zu interessieren bzw. deren Einsicht in dessen Wichtigkeit zu fördern.

Lernvoraussetzungen – Welches sind die notwendigen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler?

Falls die Schülerinnen und Schüler bestimmte Fähigkeiten, Fertigkeiten, Informationen oder Erfahrungen benötigen, um erfolgreich an der Unterrichtsstunde teilnehmen zu können: Wie gewährleisten Sie, daß die Schülerinnen und Schüler darüber verfügen?

Aktivitäten – Welche Lehrer- bzw. Schüleraktivitäten planen/erwarten Sie?

Beschreiben Sie jede Sequenz so klar wie möglich, und geben Sie deren geplante Dauer an.

Schlüsselfragen – Welches sind die wichtigsten Fragen, die Sie stellen könnten?

Listen Sie die wichtigsten Fragen auf, die Sie stellen könnten, um Diskussionen anzuregen und zu leiten, um gezielt nachzufragen und um den Fortgang der Unterrichtsstunde zu fördern.

Materialien/spezielle Vorbereitungen – Was brauchen Sie, um das Erreichen der Lernziele gewährleisten zu können?

Notieren Sie alles, was Sie für die Durchführung der Unterrichtsstunde benötigen.

Hausaufgaben – Welche Hausaufgaben werden Sie verlangen?

Notieren Sie, was Sie den Schülerinnen und Schülern sagen werden und inwiefern die Hausaufgaben diesen helfen, die Lernziele der Stunde zu sichern und sich auf zukünftige Stunden vorzubereiten. Schreiben Sie auf, wann Sie planen, die Hausaufgaben zu stellen.

Stundenende – Was werden Sie am Ende der Unterrichtsstunde sagen oder tun?

EVALUATION

Wie werden Sie das Erreichen der Lernziele überprüfen können?

Beschreiben Sie einige Indikatoren, die Sie zu hoffen beobachten zu können. Lassen Sie Platz, um das wirklich Beobachtete und andere wichtige Dinge zu notieren.

Nahezu unverändert wird als Ausgangspunkt der Konstruktion alltäglicher Unterrichtsplanung zu jedem beliebigen Unterrichtsinhalt eine Liste von Lernzielen empfohlen, die die Zielsetzung einer Unterrichtsstunde kennzeichnen. Die logische Begründung für diesen Ausgangspunkt scheint unkompliziert und direkt: Wie könnte ohne eine klare Zielsetzung ein kohärenter Plan entwickelt werden? So scheint es nur konsequent, daß der zukünftige Lehrer einen großen Teil seiner Ausbildungszeit damit zubringt zu lernen, wie Lernziele formuliert und als Schülerverhaltensweisen

ausgedrückt werden. Natürlich sind individuelle Unterrichtsstunden immer Teil eines umfangreicheren Unterrichtskontextes – einer Unterrichtseinheit, eines Kapitels in einem Lehrbuch – oder Teil einer Jahresarbeit, – und so wird erwartet, daß Lernziele gelegentlich auf diesen weiteren Kontext hin bezogen werden; aber die tatsächliche Herausarbeitung dieser Beziehung stellt oft nur ein sekundäres Interesse dar. Ob Lernziele in behavioristischen Termini aufgeschrieben werden müssen, wie es von MAGER (1984) gefordert wird, oder in weniger spezifiziertem Format, die meisten Bücher und Lehrerausbildungskurse widmen der Auswahl und der Formulierung von Lernzielen für die tägliche Unterrichtsplanung eine beachtliche Aufmerksamkeit – bis zu 20 % der gesamten Planungsarbeit.

Noch mehr Raum und Zeit – in den meisten Fällen sogar die meiste – wird der Betrachtung der geeigneten Verfahrensweisen zur Organisation der Unterrichtsstunde gewidmet. Die am stärksten als Vorschriften fungierenden Ansätze präsentieren ein einzelnes Unterrichtsmuster, von dem angenommen wird, daß es, wenn es täglich oder in Kombinationen mit anderen wöchentlichen oder monatlichen Routinen benutzt wird, zur Steigerung der Schülerleistungen führt. Die vorgeschlagenen Verfahren sind üblicherweise nur durch plausible Argumente gerechtfertigt, manchmal auch auf der Basis empirischer Unterrichtsforschungen. Sie geben vor, allgemeine Verfahren des Unterrichts für eine Vielfalt von Umständen bereitzustellen, selbst wenn die zugrundeliegenden Forschungsergebnisse notwendigerweise aus einem wesentlich beschränkteren Kontext stammen. Die sieben Stufen der Unterrichtsstunde, die von MADELINE HUNTER (1982, 1991) vertreten werden, oder das Missouri-Mathematics-Programm (GOOD et al. 1983) sind Beispiele dieses Ansatzes. Mit einem zweitem, weniger als Vorschrift auftretendem Ansatz wird anerkannt, daß es nicht nur ein einziges bestes Verfahren gibt, um Unterrichtsstunden zu planen und durchzuführen, und daß deshalb allgemeinere Fertigkeiten des Lehrens oder des Managements im Klassenzimmer angestrebt werden sollen (z.B. Motivation herstellen, gute Fragen stellen, gut erklären, zuhören, wiederholen und zusammenfassen können, die Schülerarbeit beaufsichtigen und beobachten, unangemessenes Schülerverhalten korrigieren usw.) und daß dies verschiedene Methoden erfordert. Hier liegt der Akzent auf den notwendigen allgemeinen Kompetenzen, die der Lehrer erwerben soll, um das Organisieren, Beaufsichtigen und Kontrollieren des gesamten Unterrichts zu meistern, und vom Unterrichtsplan wird erwartet, daß er zeigt, daß der Lehrer darüber reflektiert hat. Ein dritter Ansatz präsentiert ein weites Spektrum von geeigneten Methoden. Dessen Autoren versuchen darzustellen, wie allgemeine Unterrichtsmethoden (wie z.B. Lehrervortrag, fragend-entwickelnder Unterrichtsstil, Kleingruppen- und Großgruppendifkussionen, Rollenspiel, unabhängige Projekte usw.) quer zu Inhaltsbereichen und quer zu verschiedenen Altersstufen genutzt werden können. Der Hauptansatzpunkt dieser allgemeinen Methoden, genauso wie Stärke und Schwäche jeder einzelnen, werden im Detail diskutiert, und die Lehrer werden dazu ermutigt, ein Repertoire dieser Methoden zu entwickeln, das sie nach Bedarf abrufen können. Unabhängig von der Frage, welcher Ansatz übernommen wird, ist es doch verdächtig, bis zu welchem Ausmaß viele dieser Vorschläge allein durch psychologische Theorien und ausgewählte Ergebnisse experimenteller Forschung aus Laborsituationen beeinflußt sind (vgl. z.B. BORICH 1988).

Psychologische Theorien beeinflussen auch die Diskussion zur Evaluation, einem dritten allgemeinen Element in der Beschreibung von Planungsprozessen. Die meisten Autoren unterscheiden zwei Aspekte von Evaluation: Überprüfung der Schülerleistungen und eine Reflexion über den Erfolg der Unterrichtsstunde. Die Überprüfung der Schülerleistungen wird in der Regel durch die vorher aufgestellten Lernziele für die Unterrichtsstunde bestimmt; selten hält ein Autor die Lehrer dazu an, sorgfältig zu beachten, was tatsächlich gelehrt und gelernt worden ist, auch das, was – zum Besseren oder Schlechteren – nicht beabsichtigt war. Es wird einfach angenommen, daß klar spezifizierte Lernziele das beste Maß für Schülerleistungen und Lernerfolge sind. So werden Hilfsmittel der Leistungsbewertung (wie geplante Beobachtung von Schülerverhalten, Bewertungsskalen, Abprüflisten, kriterienbezogene Tests usw.) zum Hauptzentrum der Aufmerksamkeit. Techniken und Kriterien für eine systematische Reflexion und Selbstüberprüfung erhalten üblicherweise bemerkenswert wenig Aufmerksamkeit.

Bei aller Aufmerksamkeit für Ziele, Methoden, Lehrerfertigkeiten, das Klassenraummanagement und die Prüfungs- und Evaluationstechniken ist der Inhalt – das, was gelehrt werden soll – in den Hintergrund verwiesen. Der Inhalt wird als etwas Festes behandelt, dessen Merkmale und Hauptaspekte im allgemeinen als bekannt angesehen werden. Der Lehrer muß diesen Inhalt beherrschen, eine sinnvolle Auswahl treffen und dann dem Schüler vermitteln. Das folgende Zitat stellt die gesamte Diskussion über den Lehrinhalt in einem Kapitel zu Unterrichtsplanungen in einem häufig benutzten Lehrbuch zu Lehrmethoden dar:

„Der Unterrichtsinhalt: Weise den Unterrichtsinhalt der Unterrichtsstunde aus. Oft ist es hilfreich, den Inhalt als einen separaten Teil des Plans zu skizzieren. Unter Umständen mag es angemessener sein, eine Inhaltsskizze auf einem separaten Stück Papier aufzuschreiben (z.B. für den Gebrauch in einem Vortrag), manchmal ist es das beste, ihn in das Unterrichtsverfahren einzubetten“ (CLARK/STARR 1993).

Wenn auch extrem, so ist dies doch kein Einzelfall. Der Unterrichtsinhalt wird selten als ein eigenständiges Problem behandelt, welches einer sorgfältigen Analyse bedarf. Im Gegenteil, jeder Unterrichtsinhalt wird als etwas Fixiertes behandelt, so als ob er eine eindeutige Bedeutung hätte, nur allgemein gut bekannte Methoden umfasse und klar umrissene Inhalte beschreibe. Deshalb liegt die Betonung auf den Techniken der Vermittlung und nicht auf dem, was vermittelt wird.

Es könnte unterstellt werden, daß Lehrer, wenn sie einmal Techniken für die Vermittlung von Wissen gelernt haben, in der Lage sind, die jeweils geeigneten Techniken für bestimmte Unterrichtsinhalte und Umstände auszuwählen. Die meisten Autoren jedoch schweigen sich darüber aus, wie allgemeine Planungsprinzipien zu verschiedenen Unterrichtsinhalten adaptiert werden könnten oder – gleichermaßen wichtig – auf verschiedene Sicht- und Verstehensweisen bestimmter Gegenstände angepaßt werden könnten. Sie ziehen es vor, ihre Abhandlungen allgemein zu halten, zum Teil, weil die Lehrbücher, die hier bisher diskutiert wurden, für einen allgemeinen Leserkreis passend – und marktgängig – konzipiert wurden. Dieses Schweigen aber hat eine wichtige Konsequenz: Die Lehrer sehen häufig nicht die ganze Reichweite der Möglichkeiten des Inhalts, den sie unterrichten. Der Inhalt vieler Unterrichtsstunden

– sogar die Beispielstunden in den Lehrerhandbüchern – scheint nicht mehr zu sein als das, was im Lehrbuch dargestellt wird. Selten gibt es einen Hinweis, daß eine Chemie-stunde z.B. der Erforschung besonderer Phänomene dienen könnte oder einen Weg aufzeigt, Teilkontrollen über die physikalische Welt zu gewinnen, oder den systematischen Gebrauch besonderer Methoden oder vielleicht die Geschichte der Forschungen verschiedener Chemiker. Lehrer brauchen ein weites Spektrum von Zugängen zum und Sichtweisen vom Unterrichtsinhalt, um Möglichkeiten entwickeln zu können, aus denen sie auswählen, wenn sie ihre Unterrichtspläne entwerfen.

3. Vielfalt der Inhalte

Unglücklicherweise sind die meisten Lehrer in den Vereinigten Staaten nicht mit Möglichkeiten konfrontiert worden, die von mehr dynamischen Konzeptionalisierungen der Inhalte herkommen. Da ihre vorausgegangene Fach(mathematik)ausbildung sie nicht adäquat vorbereitet hat, haben sie eine eingeschränkte Vorstellung von der Bedeutung und dem Sinngehalt des Unterrichtsinhalts, den sie unterrichten. Ihre pädagogische Ausbildung hilft ihnen hier auch nicht weiter. Obwohl diese in zunehmendem Maße Inhaltsvorbereitungen enthält (BALL/MCDIARMID 1990), erfolgt diese Ausbildung typischerweise separat von der zu Lehrmethoden, und damit wird eine Trennung kreiert, die nur schwer zu überbrücken ist. In den Vereinigten Staaten hat das dominante Paradigma der Lehrerbildung eine kuriose Trennung des Inhalts von der Pädagogik hervorgerufen (DOYLE 1993).

Wenn man die mehr allgemeine Curriculumliteratur in den Vereinigten Staaten betrachtet – anstelle des mehr direktiven Lehrerausbildungsmaterials –, so kann man gelegentlich Beispiele finden, in denen eine Analyse des zu lehrenden Unterrichtsinhalts eine signifikante Rolle spielt. Hier liefern die Versuche in Richtung einer nationalen Curriculumreform, finanziert durch die National Science Foundation vor 30 bis 40 Jahren, interessante Fallstudien. Von dem Gefühl angetrieben, daß die Schüler in den Vereinigten Staaten in Mathematik und Naturwissenschaften schlecht ausgebildet werden, engagierten sich Universitätsprofessoren in Biologie, Physik, Chemie und Mathematik zusammen mit anderen in einer Reihe von Curriculumentwicklungsprojekten. Die zentrale Idee dieser Bewegung war die Vorstellung, daß Curricula so rekonstruiert werden müssen, daß sie die Struktur der zu lehrenden Disziplin adäquater repräsentieren. Die Bedeutung der Struktur einer Disziplin für den Unterricht wurde von JEROME BRUNER in seinem einflußreichen Bericht von 1959 auf der Woods-Hole-Conference artikuliert (BRUNER 1960). Danach stimmte man allgemein überein – zumindest in allen national organisierten Curriculumprojekten –, daß Schulfächer „die Struktur“ einer akademischen Disziplin zu lehren hätten.

Obgleich es einen Konsensus über die Bedeutung der Strukturen gab, gab es doch kein gemeinsames Verständnis davon, was mit diesem Terminus gemeint sein könnte. Es wurde angenommen, daß die Mathematiker, Biologen, Physiker, Historiker und andere Akademiker, die sich in der Konstruktion der Curricula engagierten, schon wissen würden, was die Struktur ihrer eigenen Disziplin ist. Da die meisten Gruppen sehr schnell zu ihrem eigenen Verständnis von „der“ Struktur ihrer Disziplin gelang-

ten, wurde diese Annahme selten hinterfragt. Darüber hinaus entstand die Vorstellung, daß, wenn einmal die zentralen Begriffe und Prinzipien als Strukturen für die Lehre ausgewählt waren, sie bald als die einzig vernünftige und mögliche Auswahl angesehen werden würden. Erst nachdem viel später die Curriculummaterialien bereits entwickelt und im Gebrauch waren, stellten Naturwissenschaftler und Mathematiker diese Vorannahmen in Frage. RENÉ THOM, ein hochangesehener Mathematiker, kritisierte, daß die neuen Curricula nicht genügend die Logik von Erfindung und Entdeckung beachteten, und empfahl, daß mehr Aufmerksamkeit auf die Entwicklung von mathematischer Intuition und die Beachtung der informellen Methoden des Begründens und Beweisens gelegt werden sollte. MORRIS KLINE, ein anderer Mathematiker, kritisierte, daß die neuen Curricula nicht in vollem Umfang die mathematische Tradition repräsentieren, und bezeichnete ihre Betonung der Strenge als „Strenge des Todes“ (KLINE 1974). Beide Autoren stellten die vorherrschenden Vorstellungen von dem, was „die“ Struktur der Mathematik konstituiert, in Frage.

Eine Stimme drückte eine ähnliche Besorgnis schon sehr viel früher aus, zwar nicht gerade über Mathematik, aber über die Annahme, daß jede Disziplin genau eine Struktur hat, die am besten von den Gelehrten identifiziert werden kann, die in dem Feld arbeiten. JOSEF SCHWAB, ein Naturwissenschaftler mit systematischem Wissen auch in Philosophie und Erziehungsfragen, entwickelte in mehreren Publikationen in den frühen 60er Jahren eigene Ideen zu dem Begriff der Wissensstruktur (SCHWAB, 1962, 1964b, 1964c, 1978). Auf einem Symposium zur Analyse des Begriffs der Wissensstruktur und seiner Bedeutung für die Bildung brachte er Argumente für seine drei wesentlichen Aspekte und ihrer Bildungsrelevanz (SCHWAB 1964a).

1. Die Organisation von Wissen in Form von Disziplinen – z.B. in Geographie, Geschichte, Physik, Biologie usw. – ist nicht eine abgemachte Sache. Nicht nur gibt es undeutliche Grenzen zwischen den Disziplinen, man kann auch viele verschiedene Kriterien benutzen, um die Disziplinen zu unterscheiden. Und wenn Disziplinen einmal identifiziert und als Schulfächer festgelegt worden sind, kann man sie immer noch so arrangieren, daß verschiedene Hierarchien entstehen und deshalb auch verschiedene pädagogische Beziehungsgeflechte entstehen.
2. Es ist unvermeidbar, daß eine Disziplin mehrere verschiedene unabhängige Hauptstrukturen hat. Jede Struktur bindet und analysiert den Unterrichtsinhalt auf verschiedene Art, indem sie die Fragen bestimmt, die gestellt werden können, oder die Daten, die untersucht werden können, die Experimente oder anderen Aktivitäten, die durchgeführt werden können, und die Art und Weise, wie Daten erstellt und interpretiert werden.
3. Jede Disziplin wird mehr als eine syntaktische Struktur haben – das bedeutet mehr als einen „pathway by which it moves from its raw data to its conclusions“ (SCHWAB 1964a, S. 11). In jedem Gebiet haben die Wissenschaftler unterschiedliche Vorstellungen über die Verifizierung von Wissen, über die besondere Rolle von Entdeckungen und Beweisen, über die Art und Weise, wie die Qualität der Daten festgelegt wird, und allgemein über den angemessenen Kanon von Beweismaterial.

Ein zentrales Thema seines Gesamtwerkes ist die Tatsache, daß Curriculumentwicklung ständig mit Auswahlproblemen konfrontiert ist, die sich aus der unvermeidlichen

Komplexität eines jeden Unterrichtsinhaltsbereiches herleiten. Diese Komplexität erzeugt konfligierende Bedeutungen, verschiedene Methoden, ungenaue Grenzen und damit komplementäre Möglichkeiten für den Unterricht. SCHWAB erkannte, daß Inhalte als curriculare Gemeinplätze einen vernachlässigten Forschungsbereich darstellten, „taken as familiar, fixed, and, at hand when wanted“ (1964a, S. 4). Er wollte uns davon überzeugen, daß Inhalte variable Begriffe sind und daß deshalb detaillierte Analysen spezieller Inhalte curriculare Hilfsmittel von Möglichkeiten darstellen, die man sich typischerweise nicht in der Schule vorstellen konnte. Um überzeugend zu sein, mußte SCHWAB Beispiele angeben, und zwar nicht nur von Analysen von speziellen Inhalten, sondern auch von deren curricularen Implikationen. Einige wurden in seinem eigenen Unterricht und nach sorgfältiger Abstimmung mit anderen in der Lehrerausbildung an der Universität von Chicago vermittelt (vgl. WESTBURY/WILKOF 1978). Andere wurden in Artikeln (SCHWAB 1958, 1960) und in dem Buch „College Curriculum and Student Protest“ veröffentlicht (1969a). Als Vorsitzender des Komitees zur Lehrerausbildung des BSSC-Projektes (Biological Sciences Study Committee) hatte SCHWAB die Gelegenheit, die Entwicklung von drei verschiedenen Versionen eines Biologiecurriculums zu beeinflussen, wobei jedes dieser Curricula auf einer unterschiedlichen Auswahl von Prinzipien basierte und auch jedes im gewissen Sinn denselben Inhalt abdeckte. Eine große Anzahl seiner Schüler schrieb Dissertationen, die zusätzliche Beispiele lieferten (HERRON 1970; SIEGEL 1975; ARON 1975; FOX 1975).

In allen Werken gebrauchten SCHWAB und seine Schüler eine themenbezogene Methode der Analyse, die Werkzeuge lieferte, um die gesamte Vielfalt der Auswahl, die in einem bestimmten Inhaltsbereich möglich ist, zu bestimmen. Diese Art und Weise der Schlußfolgerung – Teil einer Tradition, deren Wurzeln in den Werken von BACON und ARISTOTELES liegen – sucht nach Gemeinplätzen (Topoi), die genau solche Aspekte des Unterrichtsinhalts lokalisieren, die besondere Aufmerksamkeit erfordern. Als Kategorien an sich sind sie leer, aber wenn diese Kategorien durch Details angereichert werden, die aus der Analyse des betrachteten Unterrichtsinhalts abgeleitet werden, erzeugen sie eine Vielfalt von Ansichten dieses Inhalts.

„An adequate set of commonplaces, then, provides a map on which each member of a plurality can be located relative to its fellow members. It not only permits (us to know) some part of the whole, it also enables us to know – to some degree, at any rate – what part of the whole we will see“ (SCHWAB 1971, S. 513).

SCHWAB machte häufig produktiven Gebrauch von Gemeinplätzen, die schon von ARISTOTELES vorgeschlagen wurden und häufig als die vier Ursachen referiert werden (nämlich die originale, die formale, die effiziente und die endliche Ursache). Zum Beispiel benutzte er diese Termini, um die Struktur der Disziplin zu diskutieren (1978), um das Theoretische vom Praktischen zu unterscheiden (1969b) und um unterschiedliche Ansätze für den naturwissenschaftlichen Unterricht abzuleiten (1974). In derselben Weise wurden dieselben Topoi benutzt, um verschiedene Ansätze zu Mathematik- und Computerunterricht zu beschreiben (PEREIRA 1990). Im nächsten Abschnitt werden wir diese Topoi benutzen, um einen Rahmen für die Analyse von Mathematikunterrichtsstunden zu entwickeln.

3.1 *Inhalt als Ausgangspunkt der Unterrichtsplanung*

Obwohl SCHWAB in seinen Veröffentlichungen niemals auf den Mikrolevel der alltäglichen Unterrichtsplanung zielte, war er doch in besonderer Weise mit diesem Fragenkomplex befaßt. In allen seinen Werken war SCHWAB getrieben

„inward to this classroom, to a careful analysis of the students he had this semester, and always to a concern for the here-and-now of the next class, in this course, in this program“ (WESTBURY/WILKOF 1978, S. 35).

In Lehrerausbildungsseminaren der Universität von Chicago diskutierte er lang und breit die Möglichkeiten, die verschiedenen Unterrichtsinhalten inhärent sind, und arbeitete mit den Studenten an unterschiedlichen Umsetzungen für den Unterricht, die aus den aufgedeckten Verschiedenartigkeiten entwickelt wurden. Eine ähnliche Arbeit leistete er in einer Reihe von Seminaren für Lehrerausbilder an der Michigan State University, um damit den Gebrauch verschiedener Verstehensweisen von Gegenständen zu demonstrieren.

Wenn sie nicht überwunden werden, sind statische Konzeptionen des Unterrichtsinhalts ein ernsthaftes Handicap für Lehrer. Die zentrale curriculare Forderung ist immer, den Unterrichtsinhalt und den Lerner zusammenzubringen. Wenn wir die Bedeutung eines Inhalts und die Methoden seiner Vermittlung als statisch ansehen – so als ob sie zwischen den Deckeln des Lehrbuchs einbalsamiert wären –, sind unsere Optionen für die Förderung der Interaktion zwischen lernendem Subjekt und Lerngegenstand ernsthaft eingeschränkt. Wenn wir z.B. sagen, daß Kinder Literatur lernen sollten, müssen wir uns selbst fragen, welche literarischen Begriffen und Prinzipien wir meinen und in welcher Richtung eine Darbietung dieser Version von Literatur bildend ist. Unter Literaturkritikern gibt es eine Vielfalt von Ansichten darüber, was das Lesen eines Textes konstituiert, und diese verschiedenen Ansichten implizieren kontrastierende Vorstellungen von Lesefähigkeiten, Sensitivität und Strategien für das Lehren. Daraus folgt, daß Unterrichtende Wahlmöglichkeiten für die zu erreichenden Unterrichtsprodukte haben. Solche Wahlmöglichkeiten sind verdeckt, wenn der Literatur oder irgendeinem anderen Unterrichtsinhalt eine feste Vorstellung von seiner Form und seinen Bildungsmöglichkeiten aufgezwungen wird.

Der typische amerikanische Ansatz der Unterrichtsplanung hilft den Lehrern nicht, diese Alternativen aufzudecken. Wenn man mit Zielen anfängt, insbesondere mit hochspezifizierten Zielen, ist die Aufmerksamkeit vom Inhalt und seinen verschiedenen Möglichkeiten abgelenkt. Lernziele erhalten einen Wert an sich, losgelöst vom Inhalt, der ihm erst Bedeutung geben könnte, und auch losgelöst von den Lernenden, von denen erwartet wird, daß sie ihn erwerben. Die starke Betonung genereller Prozeduren für den Unterricht verstärkt noch dadurch das Problem, daß Lehrer dazu aufgefordert werden, den Unterrichtsinhalt in eine Struktur hineinzuzwängen, die seiner ganzen Komplexität nicht angemessen ist. Wenn man seinen Ausgangspunkt der Unterrichtsplanung in der Analyse des Unterrichtsinhalts lokalisiert, ist es eher möglich, neue Potentiale zu entwickeln, die man auf andere Weise möglicherweise ausläßt. Nur als Ausgangspunkt der Unterrichtsplanung jedoch; allgemeine Ziele, Lernziele

und Prozeduren sollen sich daraus entwickeln, wenn man darüber nachdenkt, wie eine von den vielversprechenderen Möglichkeiten ausgenutzt werden könnte.

Ein Beispiel: Angenommen, ein Geographielehrer schafft es nicht, daß seine Schüler Grundfähigkeiten („the basics“) erwerben (damit meint er, Landkarten lesen, die wichtigsten Städte richtig lokalisieren, die Namen bedeutender Flüsse, die hauptsächlichlichen Import- und Exportländer benennen können usw.). Es kann für ihn hilfreich sein, seine Ziele genau abzuklären, obgleich diese durch seine Interpretation der „Grundfähigkeiten“ ganz gut spezifiziert werden. Es würde für ihn hilfreicher sein, seine Unterrichtsverfahren zu revidieren, aber wenn er dort begänne, würde er sich notwendigerweise darauf konzentrieren, Ereignisse zu manipulieren statt auf eine mögliche fruchtbare Beziehung zwischen Geographie und dem Lernenden. Es würde sogar noch hilfreicher für ihn sein, damit anzufangen, sein eigenes Verständnis von Geographie neu zu analysieren, insbesondere die von ihm angenommenen grundlegenden Fähigkeiten und Grundeinsichten. Dann würde er dadurch vielleicht erfahren, daß das, was er in seiner Konzeption von Geographie als grundlegend ansieht, in einer anderen Auffassung von Geographie ein vielleicht weniger wichtiges Detail sein kann. Anstatt Geographie als eine Ansammlung von Fertigkeiten und Fakten anzusehen, die später in Gebrauch genommen werden, könnte er Geographie als einen Forschungsbereich ansehen, in dem es verschiedene Möglichkeiten gibt, Fragen zu entwickeln, oder als eine Betrachtungsmöglichkeit der uns umgebenden Welt oder als eine Anwendung von geographischen Methoden. Jede Wahl suggeriert Alternativen, die er benutzen könnte, um besonderen Bedürfnissen seiner Lerner zu dienen.

Wenn die Unterrichtsplanung bei der Betrachtung des Unterrichtsinhalts beginnt, welche Aspekte des Inhalts erfordern dann eine genauere Betrachtung? Oder anders gefragt, nämlich von der Perspektive des Inhalts her: Was könnte für Unterrichtsplanungen als allgemeingültig genommen werden? Als Ausgangspunkt könnten wir vier zentrale Fragestellungen benennen:

1. Worum geht es in der Unterrichtsstunde?
2. Wie wird die Stunde eingeleitet und weitergeführt?
3. Worauf baut die Unterrichtsstunde auf?
4. Wohin zielt die Unterrichtsstunde?

Zunächst einmal zielen diese Fragestellungen auf leere Kategorie, „slop buckets“, wie HAROLD DUNKEL Gemeinplätze zu nennen pflegte. Um ihnen eine gewisse Bedeutung und einen Sinn zu geben, müssen wir sie so zuschneiden, daß sie auf ein bestimmtes Fach passen. Abbildung 2 zeigt, wie das für Mathematik gemacht werden könnte. Der Leser wird sowohl den Einfluß von DEWEY wie den von SCHWAB auf die vorgeschlagenen Unterfragen bemerken.

Obwohl sie gewissermaßen Leitlinien anbieten, sind diese Fragen immer noch ziemlich allgemein und relativ sinnleer. Sätze wie „mathematische Gegenstände“ oder „mathematische Denkgewohnheiten“ mögen für solche Leser etwas transportieren, die mit der Literatur in Mathematikdidaktik vertraut sind, aber sie bedürfen einer weiteren Spezifizierung. Das wird im folgenden dadurch gemacht, daß eine Unterrichtsstunde über Umfang und Flächen zunächst beschrieben und dann analysiert wird.

Abbildung 2

Fragen zur Analyse des Inhalts von Mathematikunterrichtsstunden

1. Worum geht es in der Unterrichtsstunde?

- Was sind die mathematischen Schlüsselbegriffe in dieser Unterrichtsstunde? Angenommen, es gibt mehrere verschiedene Interpretationen von diesen Begriffen, welche Auswahl könnte getroffen werden?
- Auf welche mathematischen Gegenstände sind diese Begriffe bezogen? Warum werden diese speziellen Gegenstände ausgewählt anstelle anderer?
- In welcher Reihenfolge wurden die Gegenstände betrachtet? Warum ist diese besondere Wahl getroffen worden? Waren den Schülern alternative Wege durch die Materialien bewußt?
- Welche grundlegenden Beziehungen werden hergestellt? Sind Beziehungen auch weggelassen worden? Warum?

2. Wie wird die Unterrichtsstunde eingeleitet und weitergeführt?

- Mit welchen mathematischen Tätigkeiten befassen sich die Schüler während der Unterrichtsstunde?
- Welche Arten von Daten werden gesammelt oder präsentiert? Was gilt als Beleg dafür, Schlußfolgerungen zu unterstützen?
- Welche Arten von mathematischer Argumentation werden benutzt, um Wissen zu verifizieren?
- Da Kompromisse mit dem akzeptierten Kanon mathematischer Beweisführung unvermeidlich sind, wo werden solche Kompromisse gemacht?

3. Worauf baut die Unterrichtsstunde auf?

- Auf welche Weise werden die Schüler in der Unterrichtsstunde ermuntert, diesem speziellen Unterrichtsinhalt ihre Aufmerksamkeit zuzuwenden? Welche mathematischen Fragen, Probleme, Paradoxien, Puzzles oder Notwendigkeiten initiieren die Unterrichtsstunde?
- Welches mathematische Vorwissen ist erforderlich?
- Welche mathematische Vorerfahrung wird vorausgesetzt?
- Welche mathematischen Denkgewohnheiten sind notwendig und gebraucht?

4. Wohin zielt die Unterrichtsstunde?

- Was sollen die Schüler mit der präsentierten Mathematik machen?
- Welche Arten von mathematischen Denkgewohnheiten sollen die Schüler entwickeln?
- Welches weiterführende Wissen kann auf der durch die Unterrichtsstunde angebotenen Grundlage aufgebaut werden?
- Wird die externe objektive Erfahrung dieser Unterrichtsstunde die Schüler auch mit einer inneren subjektiven Erfahrung ausstatten, die zu einem weiteren mathematischen Wissenszuwachs führt?

3.2 Beschreibung einer Geometriestunde

Angenommen, man hat sich dazu entschieden, in einer Gruppe vernünftig vorbereiteter und motivierter Schüler im Alter von 13 und 14 Jahren über Umfang und Flächeninhalt zu unterrichten. Wenn man mit der Betrachtung des Unterrichtsinhalts beginnt, der durch dieses Thema impliziert wird, so wird in vielen Lehrbüchern ein traditioneller Ansatz zu diesem Thema angeboten, der mit der Erinnerung der Schüler an die Bedeutung der Begriffe Fläche und Umfang anfängt (z.B.: Fläche bedeutet die Menge des Raumes innerhalb eines Gebietes, und Umfang bedeutet die Länge der Grenze dieser Region). Daran könnten sich einige vom Lehrer auf der Tafel angezeichnete Tabellen anschließen, die verschiedene Polygonformen zeigen; das Innere wird schat-

tiert, oder die Begrenzungen werden hervorgehoben, so daß die Schüler ein intuitives Verständnis von der Bedeutung dieser Begriffe erhalten. Wenn man sich zunächst auf den Umfang konzentriert, könnte der Lehrer eine Definition des Umfangs präsentieren, z.B.: „Der Umfang eines Polygons ist die Summe der Länge seiner Seiten.“ Danach könnte er einige Tabellen anbieten, in denen die Längen gegebener Seiten angegeben sind, und die Schüler auffordern, den Umfang zu berechnen; oder es könnte der Umfang und eine Seite gegeben und die Länge der fehlenden Seite erfragt werden. Um diese Idee fortzusetzen, könnte der Lehrer einige der gegebenen Längen auslassen, aber Informationen über die Charakteristik des Polygons hinzufügen (z.B. Dies ist ein Rechteck mit den Seiten 4 cm und 6 cm; wie groß ist der Umfang?). Viele Variationen zu diesem Thema sind möglich, die meisten von ihnen könnten dann als Hausaufgabe gestellt werden. Das mögliche Ergebnis dieser Phase der Unterrichtsstunde für den Lehrer und die Schüler ist die Entwicklung oder Entdeckung einer Formel für den Umfang eines Quadrates ($P = 4 S$) und eines Rechteckes ($P = 2 L + 2 W$). Diese zwei Formeln könnten zueinander in Beziehung gesetzt werden, indem man beobachtet, daß ein Quadrat tatsächlich ja nur der Spezialfall eines Rechteckes ist. Die Hausarbeit verlangt von den Schülern, diese beiden Formeln zu benutzen.

Fläche, obwohl durchaus schwieriger, könnte in derselben Weise behandelt werden. Die Fläche eines Rechteckes würde definiert als das Produkt von seiner Länge und Breite ($A = L \times W$). Um eine Begründung für diese Definition anzugeben, würde der Lehrer eine Tabelle von vorgegebenen Rechtecken auf Karopapier mit quadratischen Karos präsentieren und die Schüler auffordern, die Fläche zu berechnen. Die meisten Schüler könnten dies ganz unmittelbar tun, aber für einige könnte es noch notwendig sein, die Einheiten der Quadrate zu zählen. Von diesen Schülern würde man erwarten, daß sie schnell zu den offensichtlichen Abkürzungen gelangen: Anstelle des Abzählens der Quadrate innerhalb der Rechteckfläche kann man einfach die Anzahl der Reihen mit der Anzahl der Spalten multiplizieren. Einmal ausformuliert, könnte diese Formel benutzt werden, um die Fläche von verschiedenen Rechtecken und Quadraten zu berechnen, und zwar mit einer Variation der gegebenen Informationen. Wiederum würde Hausarbeit für die Schüler heißen, diese Formeln auf eine Vielfalt von Formen anzuwenden, die in Rechtecke unterteilt werden könnten.

Für Schüler dieses Alters und der vorgesehenen Erfahrungsbreite würde das das Ende einer Unterrichtsstunde bedeuten. Es würde immer noch hilfreich sein zu sehen, wie dieser Lehrer am nächsten Tag die Unterrichtsstunde fortsetzt. Wenn die Formeln einmal für die Fläche eines Quadrats und eines Rechtecks ausformuliert worden sind, ist es nur natürlich nachzufragen, wie man die Fläche weniger gradliniger Formen finden könnte, so z.B. von Dreiecken, Parallelogrammen oder Trapezen. Formeln für diese Formen können in einer Reihe von logischen Schritten gefunden werden ähnlich solchen, denen man schon begegnet ist, als wir in der Schule waren: 1. Zeige, daß ein rechteckiges Dreieck eine Hälfte eines Rechteckes ist, und schließe daraus, daß die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks die Hälfte der Fläche eines Rechtecks ist ($a = a \times b/2$). 2. Zeige, daß irgendein Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgesplittet werden kann und somit mit ein bißchen Algebra, daß die Fläche eines Dreiecks durch die Formel $a = b \times h/2$ (Grundseite \times Höhe geteilt durch 2) gegeben werden kann. Ein Parallelogramm kann immer in zwei kongruente Dreiecke aufgeteilt werden und

somit in zwei Dreiecke gleicher Fläche, und so können wir schließen, daß die Fläche eines Parallelogramms zweimal die Fläche dieser Dreiecke ist ($a = b \times h$; Fläche = Grundfläche \times Höhe). Und schließlich kann ein Trapez aufgeteilt werden in ein Parallelogramm und in ein Dreieck, und wenn wir die bekannten Flächen von diesen zwei Teilstücken addieren, – und auch mit ein bißchen Algebra – kommen wir schließlich zur gewünschten Formel: $a = (b + c) \times h/2$. Wenn man dann einige oder alle dieser Formeln abgeleitet hat, würde der Lehrer die Schüler auffordern, sie an speziellen Tabellen mit graduell ansteigender Komplexität anzuwenden. Die Hausarbeit würde darin bestehen, diese Formeln auf weitere Beispiele anzuwenden.

3.3 Analyse dieser Geometriestunde

Was können wir darüber sagen, wie Mathematik in dieser Unterrichtsstunde porträtiert wird? Der Strukturrahmen, der in Abbildung 2 dargestellt ist, soll jetzt für diese Analyse benutzt werden. Obgleich die zur Illustration gewählten Fragen nicht alle berücksichtigen, die man stellen könnte, reichen sie hier aus, die Implikationen aufzuzeigen, wenn wir solche anscheinend einfachen Hauptfragen stellen. Erinnern wir uns, wir sind dabei, die Vorstellungen des Lehrers dafür zu öffnen, die Reichhaltigkeit und Varietät des Unterrichtsinhalts zu erkennen, damit er aus einem Spektrum von Möglichkeiten auswählen kann. Dieses entsteht nur dadurch, daß wir über den Inhalt in einer flexibleren Weise nachdenken.

1. Worum geht es in der Unterrichtsstunde überhaupt? Für viele Lehrer ist die Antwort zu dieser Frage so offensichtlich (Umfang und Fläche natürlich), daß die Frage kaum wert erscheint, gefragt zu werden. Obgleich sie so einfach wirkt, verbirgt sich hinter ihr mehr, als im ersten Moment erscheinen mag, und die Lehrer sollen ermutigt werden, jenseits ihrer ersten und möglicherweise oberflächlichen Reaktion nachzuforschen. Eine sorgfältige Antwort würde Teilantworten zu folgenden Unterfragen suchen:

- a) Wie wird der Begriff Umfang oder Fläche verstanden? Welche Auswahl aus mehreren Möglichkeiten wurde getroffen? Der Begriff könnte zum Beispiel entweder als eine Abstraktion aus physikalischer Erfahrung mit realen Gegenständen oder als eine Abfolge von Operationen, die man durchführen kann, um die Eigenschaft eines Objektes zu messen; oder als eine Zahl, die man berechnet, wenn man gewisse intuitive und offensichtliche Ideen zugrunde legt, oder als eine einzigartige Zahl entwickelt worden sein, die mit irgendeinem Polygon assoziiert werden kann und die mit bestimmten Postulaten konform geht.
- b) Auf welche Arten von Gegenständen wird der Begriff Umfang oder Fläche angewandt? Warum sind diese besonderen Objekte ausgewählt worden? Gäbe es auch andere gleichwertige? Die Formel für Umfang eines Rechteckes zum Beispiel kann auch auf Rauten (Drachen) und ebenso auf Parallelogramme angewandt werden. Warum werden Rauten nicht erwähnt? Welche komplexeren Formen könnten als Hausaufgabe untersucht werden? Welche Sachverhalte (z.B. nichtkonvexe Bereiche) sind ausgelassen worden und warum?

- c) In welcher Reihenfolge werden die Gegenstände betrachtet? Es ist immer möglich, daß andere Reihenfolgen logisch möglich sind, so daß man nach Gründen hinter einer speziellen Ordnung und Reihenfolge suchen muß. Zum Beispiel hätte dieser Lehrer von der Fläche des Rechtecks zu der Fläche des Parallelogramms und dann zu der Fläche irgendeines Dreiecks weiterführen können, anstatt vom Rechteck direkt zum rechtwinkligen Dreieck und dann zu irgendeinem Dreieck und dann zum Parallelogramm zu führen (wenn man direkt von Rechtecken zu Parallelogrammen weiterführt, gibt es einige logische Fallstricke, aber war dies diesem Lehrer tatsächlich bewußt?). Warum wurde diese spezielle Wahl getroffen? Waren den Schülern andere mögliche Wege durch dieses Material bewußt?
- d) Welche zentrale Beziehung wurde hergestellt? Wurden andere ausgelassen? Warum? Falls zum Beispiel die Formel für die Fläche eines Drachens berücksichtigt worden wäre (die Fläche ist gleich der Hälfte des Produktes seiner Diagonalen), so könnte dies auf fruchtbare Weise auf die Fläche des umgebenden Rechtecks bezogen werden. Wichtiger noch: Umfang und Fläche wurden als separate Begriffe entwickelt und niemals direkt aufeinander bezogen. Könnte es möglich sein, daß Schüler diese zwei Ideen durcheinanderbringen?

2. *Wie wird die Unterrichtsstunde eingeleitet und weitergeführt?* Obgleich unklarer als die erste Frage, würden viele Mathematiklehrer keine Schwierigkeiten haben, hier eine Antwort zu finden. Ausgebildet in der Meinung, daß deduktive Methoden die Kennzeichen von Mathematik seien, könnten sie antworten: „Eine Mathematikstunde beginnt mit einigen Annahmen und einigen intuitiven Ideen – oder einigen feststehenden Wahrheiten – und führt mit Hilfe einer Reihe von logischen Schritten hin zu Schlußfolgerungen. So werden Beispiele eingeführt, um die Bedeutung der allgemeinen Annahmen oder Axiome zu erklären, und spezielle Beispiele werden gegeben, damit die Schüler ihr eigenes Verständnis testen können.“ In der Tat scheint dies eine ganz gute Beschreibung der ersten Stunde zu sein. Sie startet mit einigen intuitiven Ideen über Umfang und Fläche, definiert diese Termini, legt die Gültigkeit einiger Formeln mit Hilfe allgemeiner Argumente fest und wendet diese Formeln auf spezifische Beispiele an. Wenn dies jedoch als eine Charakterisierung für alle Mathematikstunden angenommen wird, scheint die Antwort unvollständig. Gibt es andere Wege, um Mathematikstunden einzuleiten und weiterzuführen?

Zwei Umstände machen diese zu einer besonders wichtigen Frage. 1. Die sanfte Logik dieser Unterrichtsstunde ist mehr scheinbar als real. Viele Aspekte sind unter den Tisch gefegt worden. Zwei Beispiele mögen ihnen die Schwierigkeiten zeigen, an die hier gedacht werden kann. An einem Punkt in der Beschreibung der Unterrichtsstunde wird gesagt: „Irgendein Dreieck kann aufgeteilt werden in zwei rechtwinklige Dreiecke.“ Aber ist dies wirklich für irgendein Dreieck wahr? Wieso wissen wir das? Was ist, falls einer der Winkel ein stumpfer ist? Ein bißchen Nachdenken könnte Sie überzeugen, daß das Argument ein wenig komplexer ist, als es erscheint. Eine ernsthaftere Schwierigkeit tritt gleich zu Beginn der Behandlung der Fläche auf, wenn das Karopapier einem Rechteck unterlegt wird. Würden Sie annehmen, daß dieses Karopapier auch so gemacht werden könnte, daß es exakt auf das Rechteck paßt? Die meisten Leute nehmen das an. Aber angenommen, daß ein kleines bißchen des

Rechtecks übrigbleibt. Angenommen, das Rechteck mißt $3,21 \times 4,85$: Was machen wir mit diesem kleinen bißchen extra Flächenmaterial? Es ist nicht länger offensichtlich, daß wir die Quadrate zählen können, indem wir multiplizieren.

Von einem logischen Standpunkt her sind dies nichttriviale Schwierigkeiten. Es können strenge Argumente konstruiert werden, um sie zu überwinden, aber es bedarf beachtlicher Anstrengung, das zu tun – einer Anstrengung, die nicht gerade durch die Annahmen und die intuitiven Ideen, die in dieser Unterrichtsstunde benutzt werden, unterstützt wird. Mehr noch, solche Schwierigkeiten sind nicht einzigartig für diese Stunde. Sie sind inhärent in jeder beliebigen Geometriestunde, die vorgibt, logisch zu sein. Wenn der Lehrer nicht hochabstrakte, rein formale Annahmen und undefinierte Termini benutzt, wird die Logik dieser Unterrichtsstunde unvermeidbarerweise Brüche und Löcher enthalten. So wird, wissentlich oder unwissentlich, jeder Lehrer von Dreizehn- bis Vierzehnjährigen, der eine Unterrichtsstunde mit Hilfe von deduktiven logischen Schritten weiterführen möchte, eine Wahl treffen und Kompromisse schließen müssen. In solch einer Situation muß der Lehrer beachten, wo und wann er diese Kompromisse macht und welche anderen Argumenten als akzeptabel angesehen werden könnten.

Dies bringt uns zu dem zweiten Umstand: Deduktive Methoden sind nicht die einzigen, mit denen Mathematiker arbeiten. Sie sind notwendig, um intuitiv verstandene Ideen zu präzisieren und um über die Ergebnisse mit anderen zu kommunizieren, aber neue Ideen und neue Sätze werden durch intuitive und weniger formale Methoden entwickelt. Das überzeugendste Argument für nichtdeduktive Methoden ist durch GEORG POLYA kreiert worden, der in zahlreichen Büchern und Artikeln versucht hat, weniger formale Methoden, die Mathematiker gebrauchen, zu spezifizieren und zu exemplifizieren. Mathematisches Wissen, so erklärt POLYA, wird durch einen komplexen Prozeß entwickelt, bei dem zusätzlich zu Verallgemeinerungen und Deduktionen Spezialisierung, Analogie, Beobachtung, plausibles Schließen und sogar Abschätzen und Raten eingeschlossen sind. „In vielen Klassenzimmern ist Raten tabu, während in der mathematischen Forschung ‚erst Raten, dann Beweisen‘ meistens die Regel ist“ (1981, Bd. 2, S. 157). In dieser Situation würde man mit einer vollständigeren Analyse der zweiten Frage versuchen, Antworten auf die folgenden Teilfragen zu finden:

- a) In welche Art von mathematischer Aktivität werden die Schüler während der Unterrichtsstunde eingebunden? Könnten wir das Thema Umfang und Fläche abdecken und sie trotzdem unterschiedlich aktivieren? In der beschriebenen Unterrichtsstunde scheint es so, daß die Schüler ihre Zeit damit zubringen, die Lehrerdarstellung zu beobachten und Fragen zu beantworten, die sie direkt auf ihre Hausarbeitsprobleme vorbereiten. Dies macht den Zweck der Unterrichtsstunde klar: lernen, Formeln zu gebrauchen, mit deren Hilfe Fläche und Umfang in Spezialfällen berechnet werden. Andere mathematische Aktivitäten zum selben Thema – wie: Vermutungen anstellen, Daten sammeln, über Beweise streiten – würde einen anderen Zweck und andere Ziele empfehlen.
- b) Welche Arten von Daten werden gesammelt oder präsentiert? Was zählt als Beleg, um Schlußfolgerungen zu stützen? In der Beispielstunde werden die Daten vom Lehrer angeboten und organisiert, wahrscheinlich so, daß sie so direkt wie möglich

zu den gewünschten Schlußfolgerungen führen und ohne daß irgendwelche Lernhindernisse auftauchen. Ein anderer Ansatz könnte die Schüler dazu veranlassen, ihre eigenen Daten zu sammeln und zu organisieren und vielleicht auf beabsichtigte Lernhindernisse stoßen, wieder ein anderer Ansatz könnte einen anderen Zweck vorschlagen.

- c) Welche Arten von mathematischen Argumentationen werden gebraucht, um das Wissen über Fläche und Umfang zu verifizieren? Sind sie deduktiv oder induktiv? Wäre es auch möglich, Argumente einzuführen, die Analogien, Spezialisierungen oder andere eher plausible Verfahren benutzen?
- d) Da ja Kompromisse unvermeidbar sind, wo werden sie gemacht? Wenn die Argumentation deduktiv abgeleitet wird, welcher Grad von Strenge ist zweckmäßig und geeignet? Falls sie induktiv gemacht werden, wie viele Fälle müssen überprüft werden, wie plausibel sind plausible Argumente?

3. Worauf baut die Unterrichtsstunde auf? Jede Unterrichtsstunde sollte den Schülern eine mathematische Begründung dafür anbieten, sich für die Sache aktiv zu engagieren. Fehlt eine solche Motivation, ist die Unterrichtsstunde wahrscheinlich weniger effektiv, Schüler könnten dem Stundenablauf folgen, ohne zu internalisieren, was sie eigentlich lernen. Vom mathematischen Standpunkt aus hat jede Unterrichtsstunde auch dort zu beginnen, wo die Schüler Vorwissen, ein Vorverständnis und einige Erfahrungen haben. Deshalb könnte es sehr wichtig sein, folgende Fragen zu betrachten.

- a) Auf welche Weise ermutigt die Unterrichtsstunde die Schüler, dem Unterrichtsinhalt Aufmerksamkeit zuzuwenden? Welche mathematischen Fragen, Probleme, Paradoxa, Puzzles oder Bedürfnisse motivieren sie, über Umfang und Fläche nachzudenken?
- b) Welches mathematische Vorwissen ist gefordert? In der beschriebenen Unterrichtsstunde baute der Lehrer auf dem Schülerwissen über die Eigenschaften von Vierecken auf. Z.B. mußten die Schüler wissen, oder es wurde ihnen gesagt, daß die Diagonale eines Parallelogramms dieses in zwei kongruente Dreiecke aufteilt. Das ist eine Art, über Fläche zu sprechen, die nicht voraussetzt, daß die Schüler schon ein Vorwissen haben.
- c) Welche mathematischen Vorerfahrungen werden vorausgesetzt? Die Musterstunde setzt voraus, daß die Schüler ein gutes intuitives Verständnis für den Unterschied zwischen Umfang und Fläche haben. Wir wissen jedoch, daß viele Kinder – genauso wie Erwachsene – Schwierigkeiten mit diesen beiden Begriffen haben.
- d) Welche mathematischen Denkweisen werden gebraucht? Die Unterrichtsstunde führt deduktiv von Definitionen und Formeln zu Beispielen. Obgleich dies für viele dreizehn- und vierzehnjährige Schüler angemessen sein mag, gibt es doch Schüler dieses Alters, für die dieser Ansatz nicht sehr zweckmäßig ist.

4. Wohin zielt die Unterrichtsstunde? Üblicherweise ist das ganz leicht zu bestimmen, aber hier zielt diese Frage darauf ab, die allgemeineren und spezielleren Ziele des Unterrichtsplans zu betrachten. Die allgemeineren, weil wir nicht einfach nur an den konstatierten Zwecken der Unterrichtsstunde interessiert sind; wir würden z.B. gern

wissen, ob diese Zwecke konsistent sind mit dem, was von den Schülern zu tun und über die Möglichkeiten des Unterrichtsinhalts zu denken gefordert ist. So sind wir spezieller daran interessiert, welches die mathematischen Ergebnisse sind, nicht nur die allgemeinen Ergebnisse, die zweckmäßigerweise ebenfalls reflektiert werden könnten. Fragen der folgenden Art bedürfen einer Betrachtung:

- a) Was fordert der Lehrer von den Schülern eigentlich, wenn sie mit Umfang und der Fläche während der Unterrichtsstunde und der Hausarbeit umgehen? Welche anderen Aktivitäten könnten erwartet werden? Nimmt man z.B. einmal an, daß in der Unterrichtsstunde einige Formeln zur Bestimmung von Umfang und Fläche entwickelt wurden, so könnte doch der Lehrer seine Schüler auffordern, Umfang und Fläche von spezifischen Formen zu berechnen (so wie er es in der Unterrichtsstunde auch macht), dasselbe für neue Typen von Formen zu machen, Vergleiche zwischen Umfang und Fläche anzustellen (z.B. ein Rechteck hat einen Umfang von 16 cm, was können wir über seine Fläche sagen?), eine wohlorganisierte Darstellung von der Entwicklung dieser Formeln anzubieten, zusätzlich Formeln für neue Typen von Formen zu entwickeln, die entweder die Schüler oder der Lehrer ausgewählt haben, oder Formeln zu benutzen, um über einige reale Probleme nachzudenken, wie z.B. die Berechnung von Teppichböden, Tapetenwänden, Fußballfeldern usw. Jede dieser Möglichkeiten, und es gibt da natürlich noch mehr, dient einem anderen Zweck.
- b) Welche mathematischen Denkweisen entwickeln die Schüler? Sind sie z.B. aufgefordert und dazu ermutigt, nach Mustern zu suchen, Hypothesen zu testen, Vermutungen zu formulieren, extreme Fälle zu untersuchen, sinnvolle Annahmen zu machen, Experimente durchzuführen oder mathematische Ideen zu kritisieren und zu diskutieren?
- c) Welches weiter gehende mathematische Wissen kann auf der durch die Unterrichtsstunde angebotenen Grundlage aufgebaut werden?
- d) Wie wird die externe objektive Erfahrung dieser Unterrichtsstunde die Schüler mit inneren subjektiven Erfahrungen ausstatten, die zu weiterem mathematischen Wissenszuwachs führen? Wird bei den Schülern ein Gefühl für ihre mathematische Kompetenz entwickelt, werden die Schüler ermutigt, an mathematischen Aktivitäten Vergnügen zu finden?

3.4 Die revidierte Geometrieunterrichtsstunde

An dem bisher Gesagten oder seinen Implikationen kann man sehen, daß die Unterrichtsstunde eine Reihe problematischer Aspekte hat. Diese sind keine Fehler, da diese Unterrichtsstunde in der Hand eines vernünftigen und kompetenten Lehrers für die meisten Schüler ganz vernünftig funktionieren würde. Trotzdem sind diese Aspekte Sachverhalte, über die der Lehrer nachdenken sollte, weil es viele Schüler und Umstände gibt, für die diese Unterrichtsstunde nicht funktionieren würde. Die Frage nach dem Ursprung dieser Unterrichtsstunde machte auf zwei der problematischsten Aspekte aufmerksam. 1. Die mathematischen Begründungen (oder eine andere Mo-

tivation), sich für diese Aktivität zu engagieren, sind obskur. Die Unterrichtsstunde braucht mathematische Aspekte, um die Schüleraktivitäten zu initiieren. 2. Es gibt einen guten Grund anzunehmen – von Forschungsergebnissen her genauso wie von persönlichen Erfahrungen –, daß einige Schüler keinen intuitiven Zugang zur Unterscheidung von Umfang und Fläche haben. Viele Leute – auch solche, die die Formeln gut kennen – mißverstehen die Beziehung zwischen den beiden. Für diese Schüler müßte man einen alternativen Ansatz haben, der ihnen einen besseren Zugang zu den grundlegenden Begriffen gibt. Die anscheinend logische Organisation der Stunde deckt einen dritten problematischen Aspekt auf, obgleich das Ausmaß, in dem er problematisch ist, natürlich von den Schülern und von der Art ihrer „mathematischen Diät“ abhängt, die sie in vorausgegangenen Stunden erhalten haben. Viele Schüler können nicht gut mit einem deduktiven Ansatz arbeiten, aber sie können sehr gut mit anderen Formen von mathematischen Untersuchungen arbeiten. Ein anderer Ansatz, der weniger die formalen Methoden und Denkgewohnheiten betont, würde für diese Schüler wünschenswerter sein, und ohne Zweifel würden auch die anderen Schüler davon profitieren.

Eine revidierte Unterrichtsstunde zum Unterrichtsinhalt Fläche und Umfang beginnt mit der Annahme, daß die Begriffe Fläche und Umfang, obwohl den Schülern bekannt, nicht klar genug unterschieden werden. Der Lehrer würde seine Unterrichtsstunde damit eröffnen, ein Seil einer bestimmten Länge vor die Schüler zu legen, das an den Enden verknüpft ist und so um vier Stifte gelegt wird, daß annäherungsweise die Form eines Quadrats entsteht. Dies könnte man als eine Umzäunung einer Wiese mit Gras beschreiben. Die Stifte könnten dann umarrangiert werden, so daß die Form eines Rechtecks entsteht, offensichtlich in der Form unterscheidbar von dem ersten Fall, und das Seil, das noch ebenso verknüpft ist wie vorher, würde nun um die Stifte in ihrer neuen Anordnung gelegt werden. Die Schüler könnten dann gefragt werden, ob es mehr Gras auf der zweiten Wiese, weniger Gras auf der zweiten Wiese gibt oder ob beide Wiesen dieselbe Menge von Gras enthalten. In vielen Klassen werden Meinungsverschiedenheiten zu diesem Punkt auftreten, aber es ist nicht ungewöhnlich, nahezu universelle Übereinkunft zu finden, daß beide Weiden dieselbe Menge Gras enthalten (sogar mit solchen Schülern, die meinen, ganz gut über Fläche und Umfang Bescheid zu wissen).

Was auch immer passiert ist, der Lehrer würde nun die Schüler auffordern, vor der gesamten Klasse, individuell oder in Gruppen, ihre Antworten zu begründen, indem sie vorbereitete Materialien benutzen (Seile, Pflöcke, Kartons und Millimeterpapier), und folgende Verfahren vorschlagen:

- Befestige ein Stück Millimeterpapier auf einem Karton,
- stecke vier Pflöcke in das Millimeterpapier, so daß sie ungefähr ein Quadrat ergeben,
- verbinde die Enden eines Seils miteinander, so daß es genau um diese vier Pflöcke paßt.

Die Schüler sollten dann notwendige physikalische Maßnahmen durchführen, um die Fläche zu messen, indem sie die Anzahl der kleinen Quadrate innerhalb des Seiles zählen, und den Umfang messen, indem sie die Einheiten entlang der Begrenzung

addieren. Ohne Zweifel könnten einige in eine Situation kommen, in der die Seiten des Quadrats nicht exakt mit den Geraden auf dem Millimeterpapier übereinstimmen. In diesem Fall wird es nötig sein, die Zahl der ganzen Quadrate, die durch die Begrenzung eingeschlossen sind, zu schätzen. Eine systematische Sammlung und Organisation ihrer Daten würde den Schülern jedoch erlauben, erste anfängliche Hypothesen zu überprüfen und möglicherweise zu revidieren.

Wenn einmal festgestellt worden ist, daß die Fläche sich verändern kann, während der Umfang derselbe bleibt – eine Vorstellung, welche selbst Erwachsenen Mühe bereitet –, können neue Fragen entstehen. Z.B.:

- Gegeben sei ein fester Umfang, welches Rechteck ergibt den größten Flächeninhalt?
- Derselbe Umfang, welches Rechteck gibt den kleinsten Flächeninhalt?
- Was passiert, wenn wir den Flächeninhalt festhalten: Kann dann auch der Umfang sich verändern?
- Welche Abkürzungen können wir herausfinden, um Fläche und Umfang zu berechnen, anstelle sie zu messen?

Die Schüler könnten Tabellen entwickeln, in denen die variierenden Flächeninhalte bei festem Umfang oder die variierenden Umfänge bei gleichem Flächeninhalt gegenübergestellt werden. Alle diese Fragen beziehen sich auf Quadrat und Rechteck, aber es ist auch natürlich, oder es könnte natürlich sein, sie zu verallgemeinern. Der Lehrer könnte die Schüler ermuntern, Fragen darüber zu stellen und dann andere Situationen zu erforschen. Z.B.:

- Was passiert, wenn wir mit einer Dreiecksweide beginnen? Verändert das den Flächeninhalt?
- Wenn ein Quadrat den maximalen Flächeninhalt für eine rechteckige Weide gibt, welches Dreieck würde den maximalen Flächeninhalt geben? Und wie könnten wir das überprüfen?
- Wie könnten wir den Flächeninhalt in einem dreieckigen Weidestück berechnen?
- Warum ist es interessant, sich mit Dreiecken zu beschäftigen? Warum nicht mit Parallelogrammen, Trapezen oder Drachen?
- Bei einem festen Umfang, welche aller möglichen Formen gibt die maximale Fläche?
- Und was passiert in drei Dimensionen?

Weiter gehende Fragen könnten den sozialen Gebrauch des Flächen- und Umfangsbegriffs thematisieren, z.B.:

- In welchen Bereichen verwenden wir den so definierten Flächenbegriff? Warum sind Größenvergleiche von Flächen wünschenswert und gebraucht? Sind solche Rechnungen zwangsläufig?
- Ist dieser Flächenbegriff universell? Rechnen andere Kulturen auch so? (Beispiel: Flächenbegriff der Aborigines)
- Welche Rolle spielen qualitative Merkmale realer Flächen für soziale Zwecke? Wie drücken wir das in quantifizierten Angaben aus? Usw.

Als Hausarbeit könnten die Schüler ein Protokoll ihrer Untersuchungen anfertigen und die von ihnen erreichten Schlußfolgerungen und Ergebnisse in einen Bericht einbringen.

Die Diskussion hat gezeigt, wie weitgehend die didaktische Analyse des Unterrichtsinhalts und seines Umfeldes, der verschiedenen Sichtweisen vom Unterrichtsinhalt und seines möglichen sozialen Gebrauchs die Zielsetzungen und Methodenfragen in der Unterrichtsplanung einschränken oder erweitern. Erst die Basis einer angemessenen didaktischen Sachanalyse liefert Kriterien für eine Auswahl von Unterrichtsentscheidungen. Die Angebote der Allgemeindidaktik wie der Curriculumtheorie können nur als Rahmen interpretiert werden, die von der fachdidaktischen Arbeit her ausgefüllt und nutzbar gemacht werden, als Orientierung an sich sind sie für die Planungstätigkeit des Lehrers leer und verkommen zu bloßer Technik. In den USA zeigt sich das Schisma der Mathematikdidaktik und Curriculumtheorie als Problem des Unterrichtsinhalts in der Lehrerbildung unmittelbar, in der Bundesrepublik das ambivalent-widersprüchliche Verhältnis zwischen empirisch-methodisch orientierten Erziehungswissenschaften und der sich als selbständige Berufswissenschaft des Mathematiklehrers verstehenden Mathematikdidaktik in der erzeugten Disparität der Studienanteile des Lehrerberufs.

Literatur

- ARON, I.E.: Curricular Proposals for the Ethical and Political Education of Adolescents. An Exercise in the Practical. Chicago 1975.
- BALL, D.L./MCDIARMID, G.W.: The Subject Matter Preparation of Teachers. In: The Handbook of Research on Teacher Education. New York 1990.
- BORICH, G.D.: Effective Teaching Methods. Columbus, OH, 1988.
- BRUNER, J.S.: The Process of Education. New York 1960.
- CALDERHEAD, J. (ed.): Exploring Teachers' Thinking. London 1987.
- CALDERHEAD, J. (ed.): Teachers' Professional Learning. London 1988.
- CALLAHAN, J.F./CLARK, L.H./KELLOUGH, R.D.: Teaching in the Middle and Secondary School. New York 1992.
- CLARK, C.M./PETERSON, P.: Teachers' Thought Processes. In: M.C. WITTRICK (ed.): Handbook of Research on Teaching. New York 1986.
- CLARK, L.H./STARR, L.S.: Secondary and Middle School Teaching Methods. New York 1991.
- DAY, C./DENICOLA, P./CALDERHEAD, J.: Research on Teacher Thinking. Understanding Professional Development. London 1993.
- DOYLE, W.: Curriculum Theory in the Preparation of Teachers. Paper presented at the Symposium „Didaktik and/or Curriculum“. Kiel 1993.
- FOX, S.: The Conceptual Structure of Freud's Theory of Personality and its Implications for Education. Chicago 1975.
- GAGNÉ, R.M./BRIGGS, L./WAGER, W.: Principles of Instructional Design. New York 1988.
- GOOD, R.L./GROUWS, D.A./EBERMEIR, H.: Active Mathematics Teaching. New York 1983.
- HERRON, M.: The Nature of Scientific Enquiry as Seen by Selected Philosophers, Science Teachers and Recent Curricular Materials. Chicago 1970.
- HUNTER, M.C.: Mastery Teaching. El Segundo, CA, 1982.
- HUNTER, M.C.: Generic Lesson Design: The Case for. In: Science Teacher 58 (1991) 7, S. 26–28.
- JOHNSON, D.W./JOHNSON, R.D.: Learning Together and Alone. Boston 1991.

- KIM, E.C./KELLOUGH, R.D.: A Resource Guide for Secondary School Teaching. Planning for Competence. New York ¹1991.
- KLINE, M.: Why Jonny Can't Add. New York 1974.
- LOWYCK, J./CLARK, C.: Teacher Thinking and Professional Action. Leuven 1989.
- MAGER, R.F.: Preparing Instructional Objectives. Belmont, CA, ¹1984.
- PEREIRA, P.: Facets of Subject Matter. In: B.B. GUNDEM/B.U. ENGELSEN/B. KARSETH (eds.): Curriculum Work and Curriculum Content – Theory and Practise – Contemporary and Historical Perspectives. Oslo 1990, S. 136–155.
- PETERSON, P./MARX, R.W./CLARK, C.: Teacher Planning, Teacher Behavior and Student Achievement. In: American Educational Research Journal 15 (1978) 3, S. 417–432.
- POLYA, G.: Mathematical Discovery. New York 1981.
- POPHAM, W./BAKER, E.: Establishing Instructional Goals. Englewood, NJ, 1970.
- SCHWAB, J.J.: Inquiry and the Reading Process. In: Journal of General Education 11 (1958), S. 72 – 82.
- SCHWAB, J.J.: What do Scientists do? In: Behavioral Science 5 (1960), S. 1–27.
- SCHWAB, J.J.: The Concept of the Structure of a Discipline. In: Educational Record 43 (1962), S. 197–205.
- SCHWAB, J.J.: Problems, Topics and Issues. In: B.O. SMITH (ed.): Education and the Structure of Knowledge. Chicago 1964, S. 4–47(a).
- SCHWAB, J.J.: Structure of the Disciplines. Meanings and Significances. In: G.W. FORD/L. PUGNO (eds.): The Structure of Knowledge and the Curriculum. Chicago 1964, S. 1–30 (b).
- SCHWAB, J.J.: The Structure of Natural Sciences. In: G.W. FORD/L. PUGNO (eds.): The Structure of Knowledge and the Curriculum. Chicago 1964, S. 31–47 (c).
- SCHWAB, J.J.: College Curriculum and Student Protest. Chicago 1969 (a).
- SCHWAB, J.J.: The Practical. A Language for Curriculum. In: School Review 78 (1969) 1, S. 1–23 (b).
- SCHWAB, J.J.: The Practical. Arts of Eclectic. In: School Review 79 (1971), S. 493–542.
- SCHWAB, J.J.: Decision and Choice. The Coming Duty of Science Teaching. In: Journal of Research in Science Teaching 11 (1974), S. 309–317.
- SCHWAB, J.J.: Education and the Structure of the Disciplines. In: WESTBURY, I./WILKOF, N. (eds.): Science, Curriculum and Liberal Education. Selected Essays of Joseph J. SCHWAB. Chicago 1978, S. 229–272.
- SIEGEL, J.S.: Curricular Deliberation about „Hamlet“. An Exercise in the Practical. Chicago 1975.
- TABA, H.: Curriculum Development. Theory and Practise. New York 1956.
- THOM, R.: „Modern“ Mathematics. An Educational and Philosophic Error? In: American Scientist 99 (1971), S. 695–699.
- WESTBURY, I./WILKOF, N.: Introduction. In: I. WESTBURY/N. WILKOF (eds.): Science, Curriculum and Liberal Education. Selected Essays of JOSEPH J. SCHWAB. Chicago 1978, S. 1–40.